Johannes Keplers Beiträge zur Mathematik

Franz Schoberleitner, Universität Linz

Johannes Kepler ist vor allem ein berühmter Astronom. In diesem Artikel wird dargestellt, dass er auch einige wichtige Beiträge zur Mathematik geleistet hat, und zwar in einer für die Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften sehr bedeutsamen Epoche.

I. Kurze Biographie von Johannes Kepler

1571: K. wird in Weil der Stadt (Würtemberg) geboren
wächst in schwierigen Verhältnissen auf und ist von Kind an von labiler Gesundheit.
Besuch der Lateinschule
Studium der (protestantischen) Theologie in Tübingen.
In der Vorbereitung darauf: "septem artes liberales", darunter Mathematik und Astronomie.
(Lehrer: Mästlin)

1594: K. wird Mathematik-Professor in der protestantischen Stiftsschule in Graz, daneben ist er "Landschaftsmathematiker".
(Hauptaufgabe: Erstellung von Kalendern, mit "Prognostica" gewürzt)
Astrologie ist für K. Zeit seines Lebens ein guter Nebenerwerb.

"Wenn Gott jedem Tierlein Werkzeuge zur Erhaltung seines Lebens gegeben hat, warum soll es dann nicht recht sein, wenn er in derselben Absicht den Astronomen die Astrologie zuteilt?" "Die Dirne Astrologie muss ihre Mutter Astronomie aushalten, sind doch der Mathematiker Gehälter so gering, dass die Mutter gewisslich Hunger leiden müsste, wenn die Tochter nichts erwürbe."

1595: "Erleuchtungserlebnis" führt zur Schrift "Mystische Kosmologie".
K. charakterisiert darin die (damals) 5 bekannten Planetenbahnen durch die 5 ineinander geschachtelten regulären Polyeder ("Platonische Körper").

1600: Ausweisung aus Graz im Zuge der Gegenreformation.
K. will zurück nach Tübingen, wird aber abgelehnt, weil er die "lutheranische Bekenntnisformel" nicht anerkennt.
K. reist nach Prag an den Hof Kaiser Rudolfs II zum dänischen Astronomen Tycho Brahe; wird zunächst sein Assistent und dann (1602) sein Nachfolger.
K. analysiert die umfangreichen Beobachtungsdaten über die Bahn des Mars und versucht sie mit einem "mathematischen Modell" in Einklang zu bringen. Er setzt sich über alte Autoritäten und Dogmen hinweg: er verwirft die Kreisbahn und ebenso Bahnen, die aus Kreisbögen zusammengesetzt sind, und gelangt schließlich zur Ellipse.

1609: Veröffentlichung der "Astronomia nova", die die ersten beiden Gesetze über die Planetenbewegung enthält.

"In der Theologie gilt das Gewicht der Autoritäten, in der Philosophie (d.h. in der Naturwissenschaft) aber da der Vernunftgründe. [...] Wer zu einfältig ist, die Astronomie zu verstehen, oder zu kleinmütig, um ohne Angs für seine Frömmigkeit dem Kopernikus zu glauben, dem gebe ich den guten Rat, die Schule der Astronomen zı verlassen und sich seinen Geschäften zu widmen."

Es gibt für K. auch einige Probleme: Gehalt wird kaum ausbezahlt, Streit mit Erben vor Brahe, Intrigen am Kaiserhof, ...

1611: K. geht nach Linz (damals mehrheitlich protestantisch) und tritt in den Dienst des Rats dei Stadt Linz. Seine Aufgaben: Lehrtätigkeit und Anfertigen von Landkarten.
Daneben arbeitet er weiter in der Astronomie (insbes. "Rudolfinische Tafeln"), verfasst abei auch mathematische Abhandlungen:
"Nova stereometria doliorum vinariorum"; "Messekunst Archimedis"

Probleme:

- Druck der Rudolfinischen Tafeln unter äußerst schwierigen Umständen (in Ulm, auf eigene Kosten)
- K. rettet seine Mutter vor der Verurteilung als Hexe
- Ausschluss vom Abendmahl in der Linzer protestantischen Gemeinde

1626: K. verlässt (nach der Belagerung durch die Bauern) Linz und zieht herum (Regensburg, Ulm, Prag, ..)

1628: K. tritt in die Dienste von General Wallenstein (Erstellung von Horoskopen!) in Schlesien, bis dieser beim Kaiser in Ungnade fällt ..

1630: K. fährt zum Kaiser nach Regensburg, um ausständige Zahlungen einzufordern.
Dort stirbt K.

Mathematische Werke Keplers:

[1] Johannes Kepler, Gesammelte Werke. Ed. F. Hammer; herausgegeben von der Kepler-Kommission der Bayrisches Akademie der Wissenschaften, Bd 1-19, 1938-1975

[2] Johannes Kepler, *Chilias logarithmorum ad totidem numeros rotundos*, Marburg 1624, in [1, Bd 9]

[3] Johannes Kepler, *Messekunst Archimedis*, Linz 1616, in [1, Bd 9]

[4] Johannes Kepler, *Nova stereometria doliorum vinariorum*, Linz 1615, in [1, Bd 9]

[5] Johannes Kepler, R. Klug (Hg), *Neue Stereometrie der Fässer*, Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften 165, Leipzig 1987

[6] Johannes Kepler, D. Goetz, *Vom sechseckigen Schnee*, Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften 273, Leipzig 1987

II. "Nova stereometria doliorum vinariorum"

"Als ich im November des letzten Jahres (1613) meine Wiedervermählung feierte, zu einer Zeit, da an den Donauufern bei Linz die aus Niederösterreich herbeigeführten Weinfässer nach einer reichlichen Lese aufgestapelt und zu einem annehmbaren Preis zu kaufen waren, da war es die Pflicht des neuen Gatten und sorglichen Familienvaters, für sein Haus den nötigen Trunk zu besorgen. Als einige Fässer eingekellert waren, kam am 4.Tag der Verkäufer mit der Messrute, mit der er alle Fässer, ohne Rücksicht auf ihre Form, ohne jede weitere Überlegung oder Rechnung ihrem Inhalt nach bestimmte. [...] Ich bezweifelte die Richtigkeit der Methode, denn ein sehr niedriges Fass mit etwas breiten Böden und daher sehr viel kleinerem Inhalt könnte dieselbe Visierlänge besitzen. Es schien mir als Neuvermähltem nicht unzweckmäßig, ein neues Prinzip mathematischer Arbeiten, nämlich die Genauigkeit dieser bequemen und allgemein wichtigen Bestimmung nach geometrischen Grundsätzen zu erforschen und die etwa vorhandenen Gesetze ans Licht zu bringen."

Inhalt des Buches:

1. Zusammenstellung einer großen Zahl von Sätzen des Archimedes über Kreisfläche, Volumen und Oberfläche von Zylinder, Kegel, Kugel und Kugelteilen.

   K. gibt dabei Begründungen an, die als "infinitesimales Denken" charakterisiert werden können (und unterscheidet sich dabei grundlegend von Archimedes)

2. Ergänzung zu Archimedes ("Supplementum")

   - Klassifizierung der Körper, die durch Rotation eines Kegelschnittes um eine Achse entstehen.
     K. verwendet für diese Körper Bezeichnungen wie Apfel, Zitrone, Pflaume, Olive, Quitte und Spindel.
   - Bei einigen dieser Körper (Apfel, Zitrone) gelingt eine Bestimmung des Volumens durch infinitesimale Überlegungen und Vergleich mit Zylinder- und Kugelteilen.
   - Bei anderen Körpern (wie Spindeln) führt die Volumsbestimmung auf große Schwierigkeiten. Es werden einige allgemeine Sätze angegeben, die zum Teil falsch sind. Das gesteckte Ziel wird nicht erreicht.
   - In diesem Zusammenhang finden sich einige interessante (richtige) Sätze über Tangenten an die Kegelschnitte, wie sie bei der Konstruktion von Fässern vorkommen.

3. Stereometrie des österreichischen Fasses im besonderen

   K. untersucht die Methode, den Inhalt eines Fasses mit einer Visierrute zu bestimmen, und entdeckt dabei zwei merkwürdige Eigenschaften des "österreichischen Fasses."

Charakterisierung der verwendeten Mathematik:

(1) Der Text enthält weder Formeln in heutigem Sinn noch andere algebraische Darstellungsformen. Er ist in lateinischer Prosa geschrieben. Die einzigen "Variablen" sind mit Großbuchstaben bezeichnete Punkte.

- Die Formulierungen der Sätze und erst recht der Beweise sind oft kompliziert und schwer verständlich.
- Alle "Umformungen" geschehen "im Geiste" und müssen umständlich verbal beschrieben werden
- Die "Ergebnisse" sind keine Volumsformeln, sondern Vergleiche mit anderen schon bekannten Körpern.

"At ego has species tracto non numeris, non per algebram, sed ratiocinatione mentis; sane mihi non est opus ad subducendas rationes mercatuum sed ad explicandum rerum causas."

(2) K. verwendet häufig und völlig selbstverständlich *infinitesimale Argumente*. Er formuliert diese aber nicht als "neue Methode", wie das später z.B. Cavalieri getan hat. Trotzdem kann man die Denkweise Keplers als Vorläufer der Integralrechnung bezeichnen.

(3) Inhaltlich baut K. auf der Geometrie Euklids und den Ergebnissen von Archimedes, Apollonios und anderen antiken Griechen auf. Das wichtigste Werkzeug ist die *Lehre von den Proportionen*, die ebenfalls aus der griechischen Antike stammt.

NOVA
STEREOMETRIA
DOLIORVM VINARIORVM, INPRI-
mis Auſtriaci, figuræ omnium
aptiſsimæ;
ET
USUS IN EO VIRGÆ CUBI-
cæ compendioſiſſimus & pla-
ne ſingularis.

Acceſſit

STEREOMETRIÆ ARCHIME-
deæ Supplementum.

Authore

Ioanne Kepplero, Imp. Cæſ. Matthiæ I.
ejuſq; fidd. Ordd. Auſtriæ ſupra Anaſum
Mathematico.

Cum privilegio Cæſareo ad annos XV.

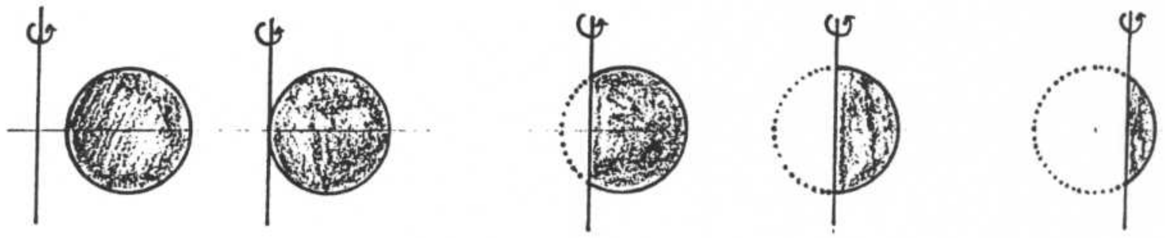
ANNO  M. DC. XV.

LINCII

Excudebat JOANNES PLANCVS, ſumptibus Authoris.

1. Klassifikation der Rotationskörper von Kegelschnittslinien

Am einfachsten sind die Körper, die durch Rotation eines Kreises um eine Achse entstehen. Je nach Lage der Achse bezüglich des Kreises sind folgende Fälle möglich:



Ring *geschlossener Ring* *Apfel* *Kugel* *Zitrone*

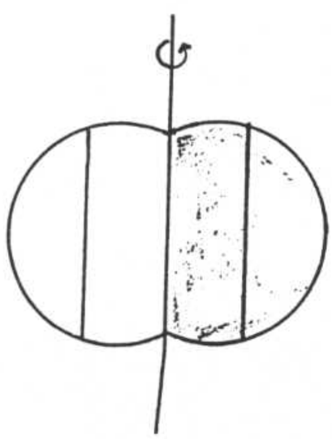
Analog kann man bei den anderen Kegelschnitten vorgehen. Allerdings ergibt sich dabei jeweils eine größere Zahl von Fällen, da sie weniger Symmetrie besitzen als der Kreis.
Insgesamt findet K. 92 Rotationskörper.

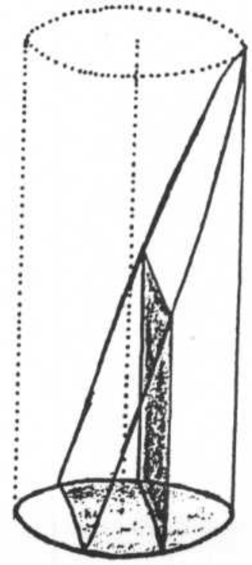
In der Folge behandelt K. neben den obigen fünf noch folgende weitere:

Quitte und *Olive* bzw. *Pflaume*:	analog zu Apfel und Zitrone, wenn der Kreis durch eine (stehende) Ellipse ersetzt wird
Spindel (hyperbolisch bzw. parabolisch):	analog zur Zitrone, wenn der Kreis durch eine Hyperbel bzw. eine Parabel ersetzt wird.

Bemerkung:
Jene Körper, die durch Rotation eines Kegelschnitts um die Hauptachsen entstehen, hat bereits Archimedes behandelt ("De conoidibus et sphaeroidibus").

2. Das Volumen des Apfels





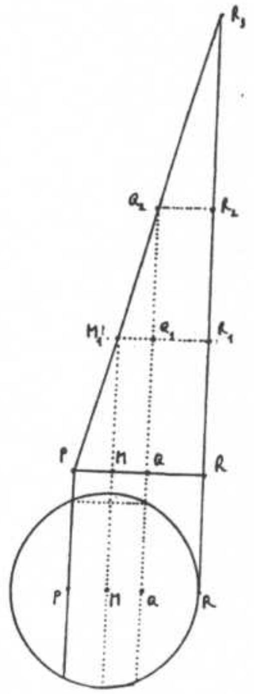
(a) Ein infinitesimaler Gedankengang ...

- Der Apfel wird in konzentrische "Röhren" infinitesimaler Dicke zerlegt.
- Jede dieser "Röhren" wird zu einem "Rechteck" ausgerollt.
- Diese "Rechtecke" ergeben zusammen einen Zylinderhuf.
  (denn in jedem Punkt ist die Höhe proportional dem Abstand von der Achse)

Das Volumen des Apfels ist gleich dem Volumen eines Zylinderhufs.

Bemerkung:
Dieser Gedankengang ist auf *beliebige Rotationskörper* anwendbar. Man erhält damit die Volumsgleichheit mit einem (allgemeinen) Zylinderhuf, dessen Grundfläche das rotierende Flächenstück ist. Für den Anstiegswinkel α der Schnittebene gegen die Grundfläche gilt stets: $\tan(\alpha) = 2\pi$

(b) Zur Bestimmung des Volumens des Zylinderhufs wird dieser in Teile zerlegt, die als volumsgleich zu Zylinder- bzw. Kugelteilen erkannt werden (und damit berechnet werden können).



"Apfelwulst":	QQ_2R_3R
"Kugelwulst":	$Q_1Q_2R_3R_1$
"Zylindersegment":	QQ_1R_1R

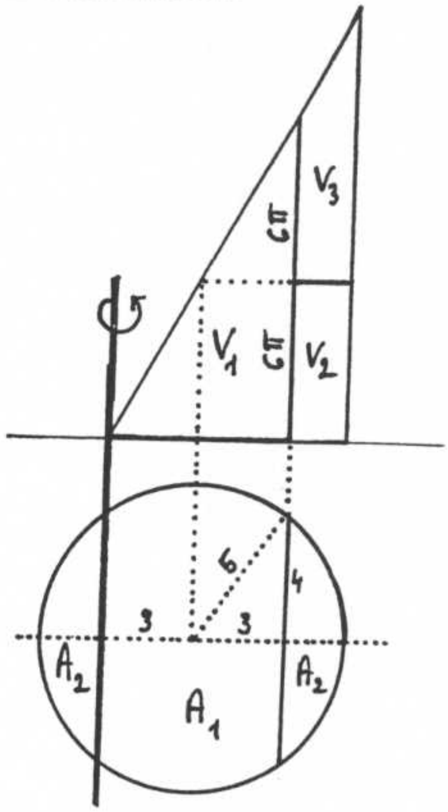
Theorema XX:

Zona Mali componitur ex Zona Globi, et segmento recto cilindri, cuius segmenti basis est segmentum, quod deficit in figura, quae gignit Malum, altitudo vero aequalis circulo, quem centrum segmenti maioris describit.

Lehrsatz XX:

Der Apfelwulst setzt sich zusammen aus einem Kugelwulst und dem Segment eines geraden Zylinders. Die Basis dieses Segments ist gleich dem fehlenden Abschnitt der Figur, durch deren Rotation der Apfel entsteht, und seine Höhe ist gleich dem Umfang jenes Kreises, welchen das Zentrum des größeren Figurensegments beschreibt.

Kepler führt dann vor, wie das Volumen eines Apfels konkret berechnet werden kann.



Wir wählen folgende Zahlen:

r = 5 (Kreisradius)
a = 3 (Abstand des Mittelpunktes von der Achse)

Zunächst berechnet man:

$A_1 = 56{,}16$
$A_2 = 11{,}18$

Damit kann man dann folgende Volumsteile des Apfels berechnen:

$V_1 =$ Volumen eines halben "Zylinders" (Grundfläche A_1, Höhe $12\,\pi$)
$V_2 =$ Volumen eines Zylindersegments (Grundfläche A_2, Höhe 6π)
$V_3 =$ Volumens des "Kugelwulstes" =
Volumen einer Kugelschicht (Radius 5, Höhe 8) – Volumen eines Zylinders (Radius 3, Höhe 8)

$V_1 = 1058{,}97$ $V_2 = 210{,}74$ $V_3 = 268{,}0$ $V_{Apfel} = V_1+V_2+V_3 = 1537{,}71$

Die Berechnungsidee Keplers kann auch in die Sprache der Integralrechnung übertragen werden:

Die Zerlegung des Rotationskörpers in unendlich dünne Röhren führt zu folgender Integralformel:

$$V = \int_0^8 2\pi x.2y\,dx = 4\pi.\int_0^8 x.y\,dx \qquad \text{mit} \quad y = \sqrt{25-(x-3)^2}$$

Mit den Methoden der Integralrechnung erhält man:

$$V = 4\pi.\int_0^8 x.\sqrt{25-(x-3)^2}\,dx \approx 1537{,}74$$

3. Das Problem der Visierrute

Das Problem der Inhaltsmessung von Weinfässern wurde zur Zeit Keplers mit Hilfe sogenannte *Visierruten* gelöst. Seit Mitte des 15.Jahrhunderts erschienen zahlreiche "Visierbüchlein", di Anleitungen zur Herstellung und zum Gebrauch von Visierruten enthielten.

Die gängige Methode war folgende:

Die Visierrute war ein Vierkantstab mit 2 Skalen:

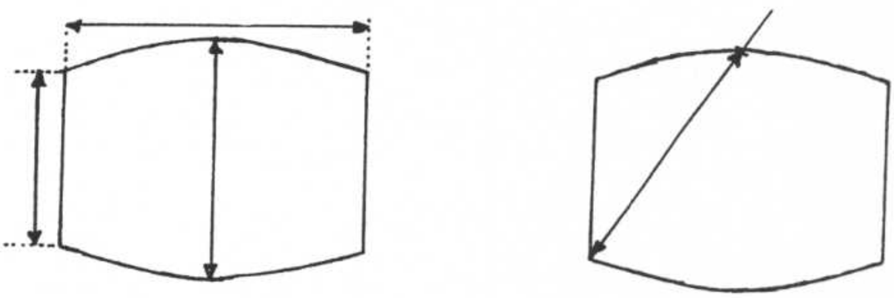
- einer linearen Skala zur Messung der Fasshöhe
- einer quadratischen Skala zur Bestimmung eines "mittleren Querschnitts" (*)

Die Berechnung des Fassvolumens bestand dann darin, die beiden erhaltenen Werte miteinander zu multiplizieren.

(*) meist wurde dafür der arithmetische Mittelwert von kleinster Querschnittsfläche (Grundfläche) und größte Querschnittsfläche (Mittelfläche) verwendet; es gab aber auch Vorschläge zur Verwendung eines gewichteter Mittels.)

In Österreich lernte Kepler nun ein Verfahren kennen, das ihn verblüffte:

Das Volumen des Fasses wurde *direkt* auf einer *kubisch skalierten* Visierrute abgelesen.
(Es genügte also eine einzige Messung, und das Multiplizieren entfiel.)



Die Untersuchung dieser Messpraxis war der eigentliche Anlass für die "Stereometria".

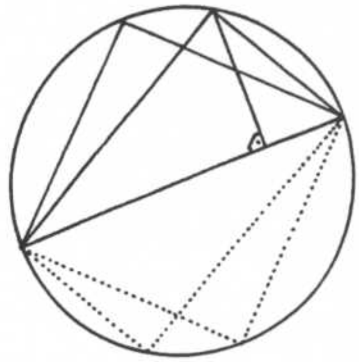
Zunächst betrachtet K. in seiner Untersuchung ein Fass von der Form eines *Zylinders*..

Lehrsatz 1:

Die Achsenschnitte gerader Zylinder, die die gleiche Diagonale haben, sind i.a. von ungleichem Flächeninhalt ....; unter ihnen ist der Schnitt jenes Zylinders am größten, dessen Höhe dem Durchmesser gleich ist.

Der Beweis der Extremwertaussage ist sehr einfach. Anders ausgedrückt lautet sie:

Unter allen einem Kreis eingeschriebenen Rechtecken besitzt das Quadrat den größten Flächeninhalt.



Jedes dem Kreis eingeschriebene Rechteck kann in zwei rechtwinkelige Dreiecke zerlegt werden.
Ihre Flächeninhalte sind das halbe Produkt aus Grundlinie und Höhe. Die Grundlinie ist aber in jedem Fall der Durchmesser des Kreises. Also ist der Flächeninhalt maximal, wenn die Höhe des Dreiecks maximal, also gleich dem Kreisradius ist. Das ist genau dann der Fall, wenn das Rechteck ein Quadrat ist.

"Ich will den Fehler nicht verhehlen, in den mich am ersten Tage die flüchtige Betrachtung dieses Satzes verfallen ließ. Denn diese Erwähnung wird dem Leser eine Mahnung sein, sich vor ähnlichen Fehlern auch sonst zu hüten .....[..]
Denn nicht der Zylinder, der den größten Achsenschnitt hat, hat auch den größten Rauminhalt. ..."

Welcher Zylinder besitzt nun bei gegebener Diagonale tatsächlich das größte Volumen ?

Kepler untersucht das Problem *durch Rechnung in einem konkreten Beispiel*:
Er wählt als Diagonale den Wert 20 und berechnet dann für jede Höhe von 1 bis 20 (Schrittweite 1) das Volumen des Zylinders.
Daraus gewinnt er eine Vermutung, die er dann streng beweist.

Dazu beweist er zunächst den

Lehrsatz IV:

Unter allen quadratischen Prismen, die einer Kugel eingeschrieben sind, besitzt der Würfel das größte Volumen.

Daraus folgt dann recht mühelos der hier eigentlich interessante

Lehrsatz V:

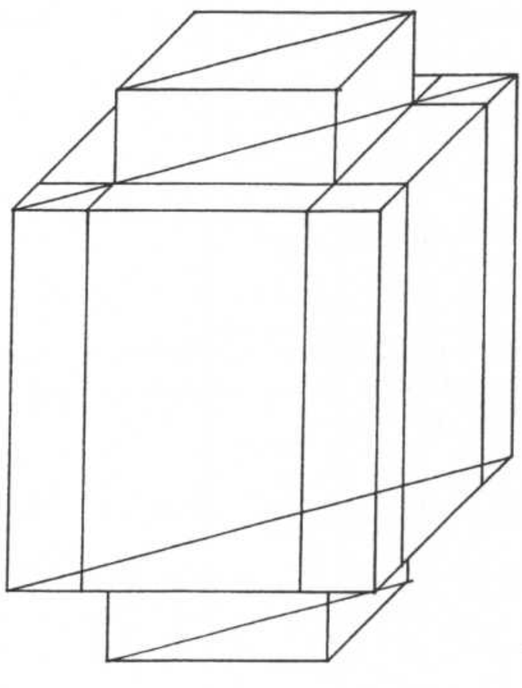
Unter allen Zylindern mit gleichen Diagonalen ist derjenige am größten, dessen Basisdurchmesser sich zur Höhe verhält wie $\sqrt{2} : 1$ *, oder wie die Seite des Tetraeders oder die Diagonale des Seitenquadrats zur Seite des derselben Kugel eingeschriebenen Würfels.*

Beweisgedanke:

Jedem einer Kugel einbeschriebenen Zylinder kann wiederum ein quadratisches Prisma gleicher Höhe eingeschrieben werden, das einen festen Anteil des Zylinders ausmacht. Daher ist das Volumen des Zylinders genau dann maximal, wenn das Volumen des quadratischen Prismas maximal ist. Nach Lehrsatz IV ist das beim Würfel der Fall. Der ihm umgeschriebene Zylinder gleicher Höhe hat als Durchmesser gerade die Diagonale des Würfels.

Der Beweis von Lehrsatz IV ist im Detail mühevoll, von seiner Grundkonzeption aber einfach zu verstehen:

K. geht aus vom Würfel, der einer Kugel eingeschrieben ist. Wenn man die Höhe des Prismas verändert (vergrößert oder verkleinert), dann kommen einige Volumsteile hinzu, einige fallen weg. K. zeigt nun, dass die hinzukommenden Volumsteile in Summe weniger ausmachen als die wegfallenden, sodass also das Volumen kleiner wird.



K. stellt nun fest, dass das typische "österreichische Fass" fast genau diese Proportionen besitzt.

"Wer wollte in Abrede stellen, dass die Natur mit Hilfe eines dunklen Gefühls auch ohne Vernunftschlüsse die Menschen Geometrie lehrt, da die Böttcher nur nach dem Augenmaß und aus Schönheitsrücksichten in der Fasshälfte die größtmögliche Figur herzustellen gelernt haben ? ... "

Wie wirkt sich eine (leichte) Wölbung des Fasses auf die Genauigkeit der Inhaltsmessung mit der Visierrute aus ?

(Er bekennt einen weiteren Irrtum ein, der in seinem ersten Manuskript enthalten war, wegen der Säumigkeit des Druckers aber von ihm korrigiert werden konnte.)

In der Untersuchung dieser Frage betrachtet er nun Fässer von der Form eines *doppelten Kegelstumpfes*. Für solche Fässer entwickelt er eine Theorie, die wegen der von ihm verwendeten einfachen Mittel ziemlich kompliziert erscheint.

Als Ergebnis erhält er eine weitere erstaunliche Eigenschaft des österreichischen Fasses:

Lehrsatz XXIX:

Die Krümmung der Fassdauben ändert beim österreichischen Fass die Angaben der Messrute nicht, bei länglicheren Fässern vermehrt sie, bei kürzeren Fässern vermindert sie den von der Rute angezeigten Inhalt.

Mit anderen Worten formuliert, findet K. folgendes heraus:

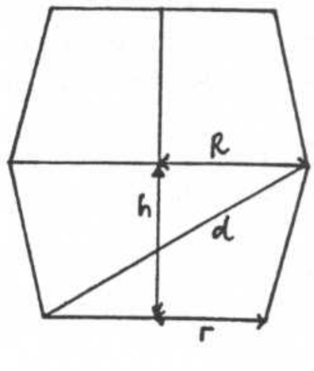
- *Für jede Form von zylindrischen Fässern (charakterisiert durch das Verhältnis von Durchmesser und Höhe) kann eine kubisch skalierte Messrute konstruiert werden, mit der das Volumen exakt abgelesen werden kann.*
- *Verwendet man eine solche Messrute für Fässer, deren Dauben (leicht) gekrümmt sind, so gilt:*

  (1) beim österreichischen Fass zeigt die Rute nach wie vor das richtige Volumen an
  (2) bei länglicheren Fässern zeigt die Rute einen zu kleinen Wert an
  (3) bei kürzeren Fässern zeigt die Rute einen zu großen Wert an.

Kepler hat mit seinen Untersuchungen also eine alte handwerkliche Praxis durchleuchtet und als sinnvoll erkannt. Sein Arbeitgeber findet dies ziemlich überflüssig:

....die löblichen Stände würden es lieber sehen, wenn er
"dergleichen Arbeit einstellen und die wichtigeren Sachen, darauf er fürnehmlich bestellt sei, als die Rudolfinische Planetentafel und die Landmappe, zu völligem Werke richten würde."

Mit den Mitteln der Differentialrechnung kann das Problem so untersucht werden:



Sei $h = r.k$
$R = r.t \quad (t \geq 1)$

Dann gilt: $d^2 = (R+r)^2 + h^2 = r^2[(t+1)^2 + k^2] =: r^2.\lambda^2$

Also: $r = \dfrac{d}{\lambda} \qquad h = \dfrac{k.d}{\lambda} \qquad R = \dfrac{t.d}{\lambda}$

Für das Fassvolumen erhält man mit der Kegelstumpf-Formel:

$$V = \frac{2h\pi}{3}.(r^2 + rR + R^2) = ... = \frac{2\pi}{3}.d^3.\frac{k.(1+t+t^2)}{\lambda^3} \qquad \text{mit} \quad \lambda = \sqrt{(t+1)^2 + k^2}$$

Sei $f_k(t) := \dfrac{k.(1+t+t^2)}{\left(\sqrt{(t+1)^2+k^2}\right)^3}$ sodass also $V = \dfrac{2\pi}{3}.d^3.f_k(t)$

Es gilt: $f_k(1) = \dfrac{3k}{(k^2+4)^{1,5}} \qquad f_k'(1) = \dfrac{3k(k^2-2)}{(k^2+4)^{2,5}}$

für $k > \sqrt{2}$ ist $f_k'(1) > 0$
für $k < \sqrt{2}$ ist $f_k'(1) < 0$
für $k = \sqrt{2}$ ist $f_k'(1) = 0$

Falls t>1 ist (d.h. das Fass wird bauchig), gilt:

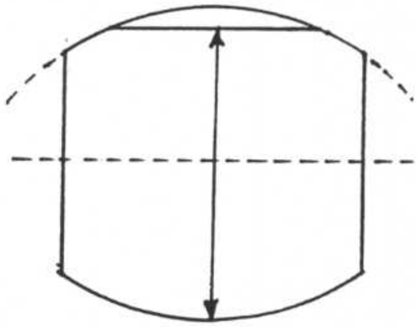
- für $k > \sqrt{2}$ ist $f_k(t) > f_k(1)$ d.h. das Fass ist größer als der abgelesene Wert
- für $k < \sqrt{2}$ ist $f_k(t) < f_k(1)$ d.h. das Fass ist kleiner als der abgelesene Wert
- für $k = \sqrt{2}$ ist $f_k(t) \approx f_k(1)$ d.h. der abgelesene Wert stimmt recht genau

III. "Messekunst Archimedis"

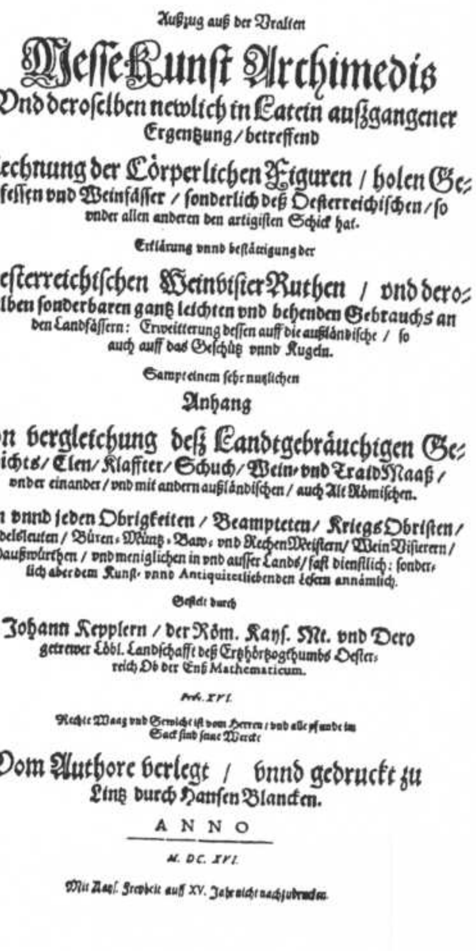
Diese Buch ist eine "populäre" Fassung der Inhalte der "Nova stereometria", verfasst in deutscher Sprache und für einen großen Adressatenkreis gedacht. Es enthält keine Beweise, sondern nur Resultate, Beispiele und Handlungsanweisungen. Zwei Punkte sind bemerkenswert:

- In einem Anhang wird eine Fülle von damals gebräuchlichen Maßeinheiten systematisch zusammengestellt und in Relation zueinander gesetzt.

- Das Buch enthält eine Näherungsmethode zur Berechnung des Inhaltes eines teilweise gefüllten Fasses. Dieses Problem konnte K. in der "Nova stereometria" noch nicht lösen.



"Es gibt Leute, die ihre Wissenschaft mit gestrenger Miene vortragen, um dadurch ihren Behauptungen Gewicht zu verleihen; dabei machen sie sich aber oft genug nur lächerlich, ohne es zu wollen. Mir scheint, dass ich von Natur aus dafür geschaffen bin, die schwere Mühe wissenschaftlicher Arbeit durch aufgelockerte Darstellung zu mildern."



Außzug auß der Uralten

Messe Kunst Archimedis

Vnd deroselben newlich in Latein außgangener Ergentzung / betreffend

Rechnung der Cörperlichen Figuren / holen Gefessen vnd Weinfässer / sonderlich deß Oesterreichischen / so vnder allen anderen den artigisten Schick hat.

Erklärung vnnd bestättigung der

Oesterreichischen Weinvisier Ruthen / vnd deroselben sonderbaren gantz leichten vnd behenden Gebrauchs an den Landfässern: Erweitterung dessen auff die außländische / so auch auff das Geschütz vnnd Kugeln.

Sampt einem sehr nutzlichen

Anhang

Von vergleichung deß Landtgebräuchigen Gewichts / Elen / Klaffter / Schuch / Wein- vnd Traid Maaß / vnder einander / vnd mit andern außländischen / auch Alt Römischen.

Allen vnnd jeden Obrigkeiten / Beampteten / Kriegs Obristen / Handelsleuten / Büren- Müntz- Baw- vnd Rechen Meistern / Wein Visierern / Haußwürthen / vnd meniglichen in vnd ausser Lands / fast dienstlich: sonderlich aber dem Kunst- vnnd Antiquitetliebenden Lesern annämlich.

Gestelt durch

Johann Kepplern / der Röm. Kays. Mt. vnd Dero getrewer Löbl. Landschafft deß Ertzhörtzogthumbs Oesterreich Ob der Enß Mathematicum.

Prov. XVI.

Rechte Waag vnd Gewicht ist vom Herren / vnd alle pfunde im Sack sind seine Wercke

Vom Authore verlegt / vnnd gedruckt zu Lintz durch Hansen Blancken.

ANNO

M. DC. XVI.

Mit Kays. Freyheit auff XV. Jahr nicht nachzudrucken.

IV. Johannes Keplers Logarithmen

Logarithmen wurden zu Beginn des 17. Jahrhundert als willkommene Rechenhilfe für Astrono-men entwickelt. Mit ihrer Hilfe können Multiplikationen und Divisionen auf Additionen und Subtraktionen zurückgeführt werden. (Bereits im 16. Jahrhundert gelang eine solche Zurück-führung mit Hilfe der Additionstheoreme für Winkelfunktionen.)

Grundidee:

Einer geometrischen Folge (der Numeri) wird eine arithmetische Folge (der Logarithmen) zugeordnet, sodass die Multiplikation von Gliedern der geometrischen Folge auf die Addition der entsprechenden Glieder der arithmetischen Folge zurückgeführt werden kann.

Im beginnenden 17. Jahrhundert war die Verwendung von Dezimalbrüchen nicht geläufig. Anstelle einer Dezimalzahl betrachtete man das Verhältnis einer (natürlichen) Zahl zu einer (willkürlich gewählten) sehr großen Zahl g. (Kepler verwendet $g = 10^7$)

Die Sichtweise, dass Logarithmusfunktionen die Umkehrfunktionen von Exponentialfunktionen sind, tritt erst bei EULER auf. Die Wahl einer Basis wird daher nicht explizit durchgeführt; sie geschieht durch die Postulierung gewisser Zusatzeigenschaften.

Die ersten Logarithmentafeln wurden (ziemlich zeitgleich, die Prioritätenfrage ist hier sehr schwer zu lösen) von Joost BÜRGI (in Prag) und John NAPIER (in Edinburgh) erstellt und veröffentlicht. Kepler erfuhr Vages über diese Logarithmen in Gesprächen mit Bürgi. 1619 erhielt Kepler ein (unvollständiges) Exemplar der Logarithmentafeln von Napier.
Er beschloss, seine bereits fertig gestellten Rudolfinischen Tafeln auf Logarithmen umzustellen. Allerdings suchte er nach einem „besser abgesicherten“ Zugang und berechnete dann die Logarithmen neu. Kepler stellte seine Logarithmentafel im Winter 1621/22 fertig; im Druck erschienen sie allerdings erst 1624 unter dem Titel: „Chilias logarithmorum ad totidem numeros rotundos“.
In der Zwischenzeit lernte Kepler die von Henry BRIGGS entwickelten dekadischen Logarithmen kennen, entschloss sich jedoch, die Rudolfinischen Tafeln nicht ein zweites Mal umzuarbeiten .....

Vorgangsweise Keplers in moderner Darstellung:

Kepler postuliert ein "Maß" (*mensura*), bei dem jedem Zahlenverhältnis $\frac{a}{b}$ eine Maßzahl $M(\frac{a}{b})$ zugeordnet wird, und zwar mit folgender Eigenschaft:

(1) $$M(\frac{a}{b}.\frac{c}{d}) = M(\frac{a}{b}) + M(\frac{c}{d})$$

Daraus folgt sofort:

(2) $$M(\frac{a}{a}) = 0$$

Ist b die "mittlere Proportionale" von a und c, d.h. $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, dann gilt:

(3) $$M(\frac{a}{c}) = 2.M(\frac{b}{c})$$

Kepler setzt nun eine "große Zahl" g fest: $g = 10^7$
und definiert seine Logarithmen so:

(4) $$L(x) := M(\frac{x}{g})$$

Beachte: L ist keine Logarithmusfunktion in unserem Sinne. Anstelle der Funktionalgleichung für die Logarithmusfunktion gilt hier nämlich:

(5) $$L(x) + L(y) = L(\frac{x.y}{g})$$

Verwendet man also diese "Logarithmen" zum Berechnen von Produkten, so muss man rechnen:

$$x.y = g.L^{-1}(L(x) + L(y))$$

Wegen (2) gilt: $L(g) = 0$

Sei nun x eine ganze Zahl mit $0 < x < g$. Kepler berechnet $L(x)$ wie folgt:

Sei x_1 die mittlere Proportionale von x und g, x_2 die mittlere Proportionale von x_1 und g usw.
Dann gilt:

$$L(x) = M(\frac{x}{g}) = 2.M(\frac{x_1}{g}) = 2.L(x_1) = 4.L(x_2) = ... = 2^n.L(x_n) \quad \text{wegen (3)}$$

Die Folge x_n konvergiert gegen g, also konvergiert $L(x_n)$ gegen 0.

Kepler betrachtet nun L(x) "in der Nähe von g" als lineare Funktion mit der (willkürlich gewählten) Steigung -1 :

$$L(x) \approx g - x \quad \text{für } x \approx g$$

Also erhält man: $L(x) = 2^n.(g - x_n)$ für ein "großes n".

Berechnung des Logarithmus von 70.......... nach Kepler:

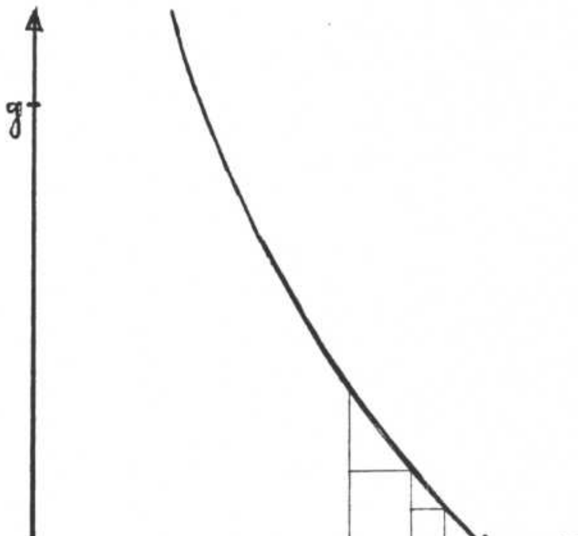
	100000	00000	00000	00000	
30 ae.	99999	99996	67820	56900	1073741824.
29 ae.	99999	99993	35641	13801	536870912.
28 ae.	99999	99986	71282	27702	268435456.
27 ae.	99999	99973	42564	55589	134217728.
26 ae.	99999	99946	85129	12883	67108864.
25 ae.	99999	99893	70258	38590	33554432.
24 ae.	99999	99787	40516	88629	16777216.
23 ae.	99999	99574	81034	22452	8388608.
22 ae.	99999	99149	62070	25698	4194304.
21 ae.	99999	98299	24147	74542	2097152.
20 ae.	99999	96598	48324	51665	1048576.
19 ae.	99999	93196	96764	73647	524288.
18 ae.	99999	86393	93992	28474	262144.
17 ae.	99999	72787	89835	81819	131072.
16 ae.	99999	45575	87076	62114	65536.
15 ae.	99998	91152	03773	10068	32768.
14 ae.	99997	82305	26024	99026	16384.
13 ae.	99995	64615	25959	97766	8192.
12 ae.	99991	29249	47518	67706	4096.
11 ae.	99982	58574	77102	11873	2048.
10 ae.	99965	17452	79822	51100	1024.
9 ae.	99930	36118	40985	14780	512.
8 ae.	99860	77086	38438	31172	256.
7 ae.	99721	73557	52112	10274	128.
6 ae.	99444	24546	13234	50059	64.
5 ae.	98891	57955	37194	96652	32.
4 ae.	97795	44506	62963	20009	16.
3 ae.	95639	49075	71498	12386	8.
2 ae.	91469	12192	28694	43920	4.
1 a.*	83666	00265	34075	54820	2.
	70000	00000	00000	00000	

Zwischen der Keplerschen Logarithmusfunktion L und der natürlichen Logarithmusfunktion besteht folgender Zusammenhang:

$$L(x) = -g.\ln(\frac{x}{g})$$

bzw.

$$\ln(x) = -\frac{1}{g}.L(x.g)$$



Beweis:

Wir setzen $f(x) := -\frac{1}{g}.L(x.g)$ und weisen nach, dass gilt: f(x) = ln(x)

Zu zeigen: f erfüllt die Funktionalgleichung $f(x.y) = f(x) + f(y)$, und $f'(1) = 1$

$$f(x.y) = -\frac{1}{g}.L(x.y.g) = -\frac{1}{g}.L(\frac{x.g.y.g}{g}) = -\frac{1}{g}.[L(x.g) + L(y.g)] = f(x) + f(y) \quad \text{wegen (4)}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{g}.L'(x.g).g = -L'(x.g)$$

$f'(1) = -L'(g) = 1$ wegen der gewählten linearen Approximation von L an der Stelle g.

V. "Strena seu de Nive sexangula " (Vom sechseckigen Schnee)

Dieses launig geschriebene Büchlein wurde 1610 verfasst (Druck 1611) und seinem Freund und Gönner Johannes M. Wackher von Wackersfeld als „Neujahrsgabe“ gewidmet.

Ausgangspunkt ist die Beobachtung, dass Schneeflocken (des „1.Typs“) sechsstrahlige Sterne von unterschiedlicher Größe und Ausgestaltung sind.
Angestrebt wird die Klärung der Frage nach der Ursache für diese Gestalt.

"Als ich so nachdenklich und sorgenvoll über die Brücke ging und mich über meine eigene Armseligkeit ärgerte, nämlich zu dir ohne Neujahrsgeschenk zu kommen, und immer demselben Gedanken nachging, dieses Nichts anzugeben oder etwas zu finden, was ihm am nächsten kommt, und ich daran die Schärfe meines Denkens übte, da fügte es der Zufall, dass sich der Wasserdampf durch die Kälte zu Schnee verdichtete und vereinzelte kleine Flocken auf meinen Rock fielen, alle waren sechseckig mit gefiederten Strahlen. [..] Ei, das ist ein erwünschtes Neujahrsgeschenk für einen Freund des Nichts! So wie der Schnee da vom Himmel herabkommt und den Sternen ähnlich ist, ist er auch passend als Geschenk eines Mathematikers, der nichts hat und nicht erhält. "

Hintergrundphilosophie:

Die Natur ist durch einfache mathematische (geometrische) Prinzipien bestimmt. Der Naturforscher versucht, die Phänomene der Natur aus solchen Prinzipien zu erklären. („Platonisches Denken“)

Inhalt des Buches:

Zuerst werden andere Beispiele besprochen, die die Art der Fragestellung bzw. die zugrunde liegende Denkweise klar machen:

- Form der Bienenwaben
- Form der Granatapfelkerne
- Fünfzahl bei Blütenblättern

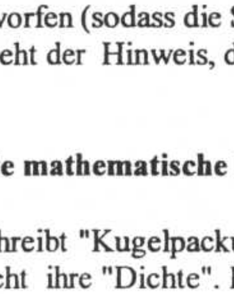
Für die Form der Schneeflocken wird ein Erklärungsversuch ausführlich dargestellt (*), zuletzt aber wieder verworfen (sodass die Schrift ihr Ziel eigentlich nicht erreicht !)
Am Ende steht der Hinweis, dass Mineralogen und Chemiker etwas zu forschen haben ....

Interessante mathematische Inhalte:

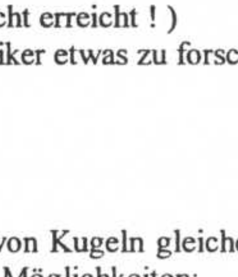
- K. beschreibt "Kugelpackungen", d.h. Anordnungen von Kugeln gleicher Größe im Raum, und untersucht ihre "Dichte". Er analysiert dabei folgende Möglichkeiten:

  Lage der Kugeln in einer Schicht:

  (a)

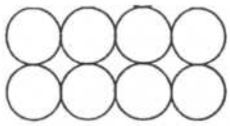


  (b)

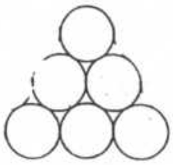


Lage der Schichten zueinander:

(a)



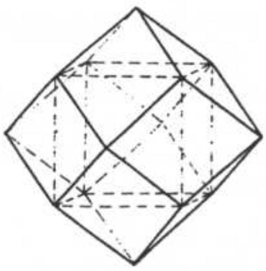
(b)

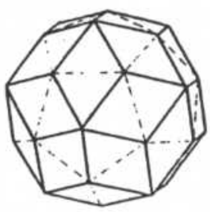


K. argumentiert, dass sich in den Fällen (ab) und (bb) die selbe Packung ergibt, und behauptet ohne Beweis, diese sei die Packung mit größtmöglicher Dichte.

Wenn man die Begriffe "Kugelpackung" und "Dichte einer Kugelpackung" exakt definiert, ist dies die sogenannte "Kepler-Vermutung", die in voller Allgemeinheit bis vor kurzem nicht bewiesen werden konnte, obwohl prominente Mathematiker der Vergangenheit daran gearbeitet haben.
1998 präsentierte Hales einen Beweis, der wesentlich mit Hilfe eines Computerprogramms geführt wird.

- Die dichteste Kugelpackung führt zu einer Zerlegung des Raumes in Rhombendodekaeder (begrenzt von den Tangentialebenen in den Berührpunkten der Kugeln).
  Ein Rhombendodekaeder besteht aus 12 kongruenten Rhomben. Zusätzlich entdeckt K. einen Körper, der aus 30 kongruenten Rhomben besteht.





K. behauptet:

- Bienenwaben haben die Form eines abgeschnittenen Rhombendodekaeders.
  Begründung: Die Waben sollen den Raum ganz ausfüllen, und der Materialverbrauch soll dabei minimal sein.

- Granatapfelkerne haben (ungefähr) die Form von Rhombendodekaedern.
  Begründung: Die Kerne sind zuerst weiche Kügelchen, die in hexagonaler Packung angeordnet sind. Beim Wachstum der Kerne weicht das Material in die Zwischenräume aus ...